MATRICI

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

MATRICE
2×3
2 RIGHE × 3 COLONNE

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

MATRICE
QUADRATA
3 × 3

PRODOTTO SCALARE DI
VETTORE RIGA × VETTORE COLONNA

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

PRODOTTO DI 2 MATRICI

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} \overset{c_{11}}{a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}} & \overset{c_{12}}{a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}} \\ \overset{c_{21}}{a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}} & \overset{c_{22}}{a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}} \end{pmatrix}$$

MATRICI E TRASFORMAZIONE DI UN VETTORE

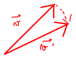
$$\underset{\text{MATRICE}}{A} \cdot \underset{\text{VETTORE COLONNA}}{\vec{v}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y \\ a_{21}x + a_{22}y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \underset{\text{VETTORE COLONNA}}{\vec{b}}$$

VETTORE TRASFORMATO

MATRICE ORTOGONALE (DI ROTAZIONE)

$O \cdot \vec{v} = \vec{v}\,'$ VETTORE RUOTATO

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$



UNA MATRICE T RAPPRESENTA UNA APPLICAZIONE CHE TRASFORMA UN VETTORE O UN'ALTRA MATRICE

$$T^{-1} A T = A' \quad \ldots$$

T^{-1}: MATRICE INVERSA DI T

MATRICI E FORME QUADRATICHE (SCALARI)

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{21}y & a_{12}x + a_{22}y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$$

$$= a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{21}xy + a_{22}y^2$$

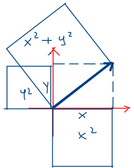
SE $a_{12} = a_{21}$ (MATRICE SIMMETRICA)

$$= \boxed{a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underline{\underline{x^2 + y^2}}$$

TEOREMA DI PITAGORA



TENSORI

MATRICI $m \times m$ CHE SI TRASFORMANO DA UN SISTEMA DI RIFERIMENTO A UN ALTRO SECONDO LA LEGGE

$$T'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} T_{\rho\sigma} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \quad \text{(FORMA COVARIANTE)}$$

OPPURE

$$T'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} T^{\rho\sigma} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\sigma} \quad \text{(FORMA CONTROVARIANTE)}$$

MATRICE DI TRASFORMAZIONE DALLE COORDINATE $\{x^\rho, x^\sigma\}_{\rho,\sigma=0,1,2,3}$ ALLE COORDINATE $\{x'^\mu, x'^\nu\}_{\mu\nu=0,1,2,3}$.

PERCHÈ TENSORE?

DALLA MATRICE DI POISSON, O "TENSORE DEGLI SFORZI", CHE RAPPRESENTA LE TENSIONI IN UN MEZZO MATERIALE ELASTICO NELLE DIREZIONI CARTESIANE x, y, z PRODOTTE DA UN IMPULSO IN UNA DATA DIREZIONE (x o y o z).

$$\begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix}$$

TERMINI DIAGONALI

STRESS LONGITUDINALI (TRASMISSIONE DI UN IMPULSO NELLA SUA STESSA DIREZIONE)

STRESS TRASVERSALI O DI "TAGLIO" (TRASMISSIONE DI UN IMPULSO TRASVERSALE ALLA SUA DIREZIONE)

$\Downarrow$

(1) LA TEORIA CLASSICA DELL'ELETTROMAGNETISMO "VEDE" IL CAMPO ELETTROMAGNETICO COME UNA PERTURBAZIONE IN UN MEZZO ELASTICO CHIAMATO "ETERE", LA CUI ESISTENZA È NEGATA DAL II° PRINCIPIO DI RELATIVITÀ.

(2) LA RELATIVITÀ GENERALE VEDE IL CAMPO GRAVITAZIONALE COME IL PRODOTTO DELL'INCURVAMENTO DI UN MEZZO ELASTICO, LO "SPAZIO-TEMPO", DA PARTE DELLA DISTRIBUZIONE DI MASSA-ENERGIA.

A SUA VOLTA LA DISTRIBUZIONE DI MASSA-ENERGIA-IMPULSO NELLA TEORIA DELLA RELATIVITÀ GENERALE È RAPPRESENTATA DAL TENSORE "ENERGIA IMPULSO".

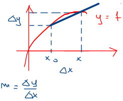
$T_{\mu\nu}$ =

DENSITÀ DI ENERGIA	FLUSSO DI ENERGIA LUNGO x	FLUSSO DI ENERGIA LUNGO y	FLUSSO DI ENERGIA LUNGO z
FLUSSO DI ENERGIA LUNGO x	FLUSSO DI MOMENTO x LUNGO x	FLUSSO DI MOMENTO x LUNGO y	FLUSSO DI MOMENTO x LUNGO z
FLUSSO DI ENERGIA LUNGO y	FLUSSO DI MOMENTO y LUNGO x	FLUSSO DI MOMENTO y LUNGO y	FLUSSO DI MOMENTO y LUNGO z
FLUSSO DI ENERGIA LUNGO z	FLUSSO DI MOMENTO z LUNGO x	FLUSSO DI MOMENTO z LUNGO y	FLUSSO DI MOMENTO z LUNGO z

. . . . .

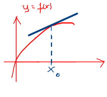
CENNI DI ANALISI MATEMATICA

RAPPORTO INCREMENTALE



$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

DERIVATA DI f IN x_0



PER $x \to x_0$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = f'(x_0)$$

$$f'(x) = \frac{df}{dx}(x_0)$$

PER LE FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI ($ES.: f(x,y,z) = (y^2-1)e^{x+2z}$) SI USA LA "DERIVATA PARZIALE RISPETTO A UNA VARIABILE"

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (y^2-1)\,e^{x+2z} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y\,e^{x+2z}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2(y^2-1)\,e^{x+2z}$$

INVARIANZA DELLE LEGGI DELLA FISICA

- GALILEO E LA II^a GIORNATA DEL "DIALOGO": QUANDO È IMPOSSIBILE RICONOSCERE IL MOTO DEL SISTEMA DI RIFERIMENTO (L'EPISODIO DELLA NAVE)

- NEWTON E I PRINCIPI DELLA DINAMICA:

IL PRINCIPIO DI INERZIA E I SISTEMI INERZIALI (QUELLI IN CUI VALE IL PRINCIPIO DI INERZIA)

IL II° PRINCIPIO DELLA DINAMICA È L'INVARIANZA GALILEIANA DELL'ACCELERAZIONE CHE RENDE LA LEGGE $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ INVARIANTE PER I SISTEMI INERZIALI

$$a' = \frac{\Delta v'}{\Delta t} = \frac{v_2' - v_1'}{\Delta t} = \frac{v_2 - \cancel{V} - (v_1 - \cancel{V})}{\Delta t} = a$$

- LE LEGGI DELL'ELETTROMAGNETISMO (EQUAZIONI DI MAXWELL) NON SONO INVARIANTI PER SISTEMI INERZIALI, PERCHÉ DIPENDONO DALLA VELOCITÀ DELLA LUCE:

(a) $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{Q}{\varepsilon}$ (b) $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$

(c) $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ (d) $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{d\vec{E}}{\partial t} \right)$

$$\Downarrow$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \approx 3 \cdot 10^8 \ \frac{m}{s}$$ VELOCITÀ DELLA LUCE

- EINSTEIN E IL II° PRINCIPIO DI RELATIVITÀ: LA VELOCITÀ DELLA LUCE È UNA GRANDEZZA INVARIANTE (INDIPENDENTE DAL SISTEMA DI RIFERIMENTO)

$$\Downarrow$$

SPAZIO A 4 DIMENSIONI: x, y, z, ict $(i = \sqrt{-1})$
OGNI PUNTO CORRISPONDE A UN EVENTO

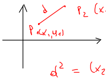
NASCE LO SPAZIO-TEMPO

$$\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - c^2 \Delta t^2 = I$$
(INTERVALLO INVARIANTE)

INTERVALLO INVARIANTE = SEPARAZIONE TRA 2 EVENTI NELLO SPAZIO-TEMPO

PER ESPRIMERE TUTTE LE LEGGI DELLA FISICA IN FORMA "INVARIANTE" OCCORRE UN NUOVO LINGUAGGIO MATEMATICO: IL LINGUAGGIO "TENSORIALE" (TENSORE = MATRICE)

ESEMPIO:
DISTANZA TRA 2 PUNTI NEL PIANO (2 DIMENSIONI)



$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$$

PRODOTTO DI MATRICI = PRODOTTO SCALARE RIGA × COLONNA

(PRODOTTO SCALARE $(a_x, a_y) \cdot (b_x, b_y) = a_x b_x + a_y b_y$)

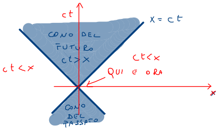
$$(\Delta x \ \Delta y) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = (\Delta x \ \Delta y) \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \Delta x^2 + \Delta y^2$$

$$\Downarrow$$

INTERVALLO INVARIANTE INFINITESIMO = LUNGHEZZA DI UN SEGMENTO INFINITESIMO NELLO SPAZIO-TEMPO:

$$c^2 d\tau^2 = ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$
(τ = INTERVALLO INFINITESIMO DI "TEMPO PROPRIO")

$$(c\,dt \ dx \ dy \ dz) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c\,dt \\ dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = ds^2$$



LUNGHEZZA DEL PERCORSO DI UN SEGNALE LUMINOSO IN Δt

$$\overbrace{c\,\underbrace{\Delta t}_{\text{DISTANZA TEMPORALE}}} \geq \underbrace{\Delta x}_{\text{DISTANZA SPAZIALE}}$$

PRINCIPIO DI CAUSALITÀ LOCALE:

[DUE EVENTI POSSONO ESSERE COLLEGATI SOLO DA UN'INTERAZIONE]

[LA VELOCITÀ DI UNA QUALSIASI INTERAZIONE NON PUÒ SUPERARE LA VELOCITÀ DELLA LUCE]

CONSEGUENZE DEL II° PRINCIPIO DI RELATIVITÀ

- RELATIVITÀ DELLA SIMULTANEITÀ
- DILATAZIONE DEL TEMPO
- CONTRAZIONE DELLE LUNGHEZZE
- TRASFORMAZIONI DI LORENTZ DELLO SPAZIO-TEMPO

$$\begin{cases} ct' = \gamma(ct - \beta x) \\ x' = \gamma(x - \beta ct) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \qquad \left(\text{CON } \beta = \frac{v}{c} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \right)$$

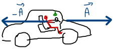
IL FILOSOFO E. MACH RILEVA COME I SISTEMI DI RIFERIMENTO INERZIALI SIANO SOLO UN ESPEDIENTE PURAMENTE TEORICO; IN REALTÀ NON ESISTONO!

GLI EFFETTI DI INERZIA SONO PRODOTTI NEI SIST. DI RIF. ACCELERATI RISPETTO ALLE MASSE DELL'UNIVERSO (MACH)

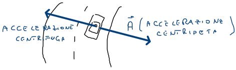
LA RICERCA DI UN'INVARIANZA PIÙ GENERALE DELLE LEGGI DELLA FISICA (EINSTEIN)

"EFFETTI DI INERZIA": PRODOTTI DALL'ACCELERAZIONE DEL SISTEMA DI RIFERIMENTO... (MA RISPETTO A COSA?)

(a) ACCELERAZIONE DI TRASCINAMENTO PRODOTTA DA UNA VARIAZIONE DEL MODULO DELLA VELOCITÀ DEL SISTEMA DI RIF. (ACCELERAZIONE DELL'AUTO SU DI UN RETTILINEO)



(b) ACCELERAZIONE CENTRIFUGA, PRODOTTA DAL CAMBIAMENTO DIREZIONE DELLA VELOCITÀ DEL SIST. DI RIF.)



PRINCIPIO DI EQUIVALENZA

GLI EFFETTI DI INERZIA SONO EQUIVALENTI A QUELLI DEL CAMPO GRAVITAZIONALE.

⇓

CIÒ SIGNIFICA CHE IN UN ASCENSORE IN CADUTA LIBERA, O IN UN'ASTRONAVE IN ORBITA INTORNO A UN PIANETA MI TROVO IN ASSENZA DI GRAVITÀ PERCHÉ LA FORZA DI GRAVITÀ $(\vec{F} = m \cdot \vec{g})$ È ANNULLATA DAGLI EFFETTI DI INERZIA $(-m \cdot \vec{A}$ CON $\vec{A} = \vec{g})$, CIOÈ DALLA FORZA DI TRASCINAMENTO VERSO L'ALTO DENTRO L'ASCENSORE ACCELERATO VERSO IL BASSO DALLA GRAVITÀ, E DALLA FORZA CENTRIFUGA DENTRO L'ASTRONAVE (CHE SUBISCE L'ACCELERAZIONE CENTRIPETA DALLA FORZA DI GRAVITÀ).

⇓ QUINDI

DESCRIVERE I COMPORTAMENTI FISICI CON LE LEGGI DELLA FISICA IN UN SISTEMA DI RIF. ACCELERATO, EQUIVALE A DESCRIVERLE IN UN CAMPO GRAVITAZIONALE.

GRAVITÀ E SPAZIOTEMPO: L'INTERPRETAZIONE GEOMETRICA DELLA GRAVITAZIONE.

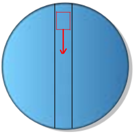
VEDIAMO ORA IL CASO DI UN'OSSERVATORE CHIUSO NELLA CABINA DI UN ASCENSORE IN CADUTA LIBERA (!!!) ....

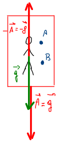
SEGUE ⟶

LO DIVIDIAMO IN DUE SITUAZIONI DIVERSE

(1) LONTANO DAL CORPO ATTRATTORE

(2) ALL'INTERNO DEL CORPO ATTRATTORE

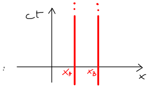




IN ENTRAMBI I CASI L'OSSERVATORE E GLI OGGETTI DI CUI MISURA LE POSIZIONI SONO PRIVI DI PESO COME SE FOSSERO NEL VUOTO (L'ACCELERAZIONE DI TRASCINAMENTO $-\vec{A}=-\vec{g}$, DOVUTA ALL'ACCELERAZIONE $\vec{g}$ DELLA CADUTA DELLA CABINA, ANNULLA L'ACCELERAZIONE DI GRAVITÀ).

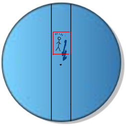
$\Downarrow$

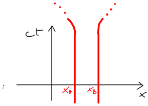
IN ENTRAMBI I CASI L'OSSERVATORE REGISTRERÀ LE ALTEZZE COSTANTI DELLE MASSE A E B IN UN DIAGRAMMA SPAZIOTEMPORALE



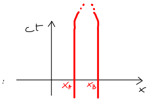
IN CUI LE LORO TRAIETTORIE SONO DUE RETTE PARALLELE.

MA QUANDO LE 2 CABINE SI AVVICINANO AL CENTRO DI ATTRAZIONE GRAVITAZIONALE LA DISOMOGENEITÀ DELLA GRAVITÀ PRODUCE EFFETTI DIVERSI NELLE DUE DIVERSE SITUAZIONI





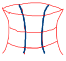
LE RETTE INIZIALMENTE PARALLELE COMINCIANO A DIVERGERE



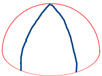
LE RETTE INIZIALMENTE PARALLELE COMINCIANO A CONVERGERE

SONO CARATTERISTICHE TIPICHE DELLE GEOMETRIE DI DUE SUPERFICI CON DIVERSA CURVATURA.

CURVATURA IPERBOLICA (SELLA O COLLO DI VASO)



CURVATURA SFERICA



ELEMENTO CARATTERIZZANTE DI UNO SPAZIO-TEMPO CURVO: IL TENSORE METRICO

– METRICA DELLO SPAZIO-TEMPO PIATTO (MINKOWSKI)

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

$$\Downarrow$$

TENSORE METRICO $\quad \eta_{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

– METRICA DELLO SPAZIO-TEMPO INCURVATO DA UNA MASSA M PUNTIFORME (O SFERICA DI RAGGIO R, A DISTANZA $r > R$) (SCHWARTZSHILD).

$$c^2 d\tau^2 = ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} - r^2 \left(\operatorname{sen}^2\theta \, d\varphi^2 + d\theta^2\right)$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2GM}{c^2 r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \operatorname{sen}^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\lambda} = \delta^\nu_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

LA "METRICA" È IL QUADRATO DELLA LUNGHEZZA DI UN ELEMENTO INFINITESIMO DI "GEODETICA".

LA GEODETICA È LA LINEA CHE CONGIUNGE 2 PUNTI DI UNA SUPERFICIE (VARIETÀ) LUNGO IL PERCORSO PIÙ BREVE. (SEGMENTO PER IL PIANO, ARCO DI MERIDIANO PER LA SUP. SFERICA).

IN SINTESI:

1) LE FORZE DI INERZIA (IN UN SISTEMA IN CADUTA LIBERA ACCELERATO DALLA GRAVITÀ) POSSONO ELIMINARE LA FORZA DI GRAVITÀ, MA SOLO LOCALMENTE (SISTEMI "LOCALMENTE INERZIALI" IN CUI VALE IL PRINCIPIO DI INERZIA)

2) IL CAMPO GRAVITAZIONALE IN UN SISTEMA LOCALMENTE INERZIALE VIENE "RIVELATO" DALLA SUA DISOMOGENEITÀ COME "CURVATURA" DELLO SPAZIO TEMPO)

$$\Downarrow$$

DISOMOGENEITÀ DELLA GRAVITAZIONE $\Longleftrightarrow$ CURVATURA DELLO SPAZIO-TEMPO

GRAVITAZIONE CLASSICA — RELATIVITÀ GENERALE (FORMALISMO TENSORIALE)

POTENZIALE GRAVITAZIONALE

$$\varphi = -\frac{GM}{r} \quad \left(G = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2}\right) \quad \Longleftrightarrow \quad g_{00} = 1 - \frac{2GM}{c^2 r}, \quad g_{11} = \frac{1}{1 - \frac{2GM}{c^2 r}}$$

METRICA PER UNA MASSA PUNTIFORME

CAMPO GRAVITAZIONALE

$$g = E_r = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} \quad \Longleftrightarrow$$

CONNESSIONE AFFINE O SIMBOLO DI CHRISTOFFEL

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\epsilon} \left(\frac{\partial g_{\mu\epsilon}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\epsilon\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\epsilon}\right)$$

EQUAZIONE DELLA CADUTA DI UN GRAVE

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{Gm}{r^2} = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} \quad \Longleftrightarrow$$

EQUAZIONE DELLA CADUTA DI UN GRAVE

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} = \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \cdot \frac{dx^\nu}{d\tau}$$

TENSORE DI CURVATURA DI RIEMANN

DISOMOGENEITÀ DELLA GRAVITÀ (RADIALE)

$$\frac{\partial g}{\partial r} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \quad \Longleftrightarrow \quad R^\lambda_{\mu\nu\kappa} = \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa} - \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu} + \Gamma^\eta_{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\eta\kappa} - \Gamma^\eta_{\mu\kappa}\Gamma^\lambda_{\eta\nu}$$

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{\mu\kappa}}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} + \frac{\partial^2 g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu \partial x^\kappa} - \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda \partial x^\kappa} - \frac{\partial^2 g_{\lambda\kappa}}{\partial x^\mu \partial x^\nu}\right) + g_{\eta\sigma}\left(\Gamma^\eta_{\mu\kappa}\Gamma^\sigma_{\lambda\nu} - \Gamma^\eta_{\mu\nu}\Gamma^\sigma_{\lambda\kappa}\right)$$

CALCOLO DELLA CURVATURA

DERIVATA COVARIANTE DI UN VETTORE

$$V^{\mu}{}_{;\nu} = \underbrace{\frac{\partial V^{\mu}}{\partial x^{\nu}}}_{\text{VARIAZIONE INTRINSECA DEL CAMPO VETTORIALE}} + \underbrace{\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} V^{\lambda}}_{\text{VARIAZIONE DOVUTA ALLA GEOMETRIA DELLO SPAZIO (PER TRASPORTO PARALLELO DEL VETTORE)}}$$

τ TEMPO PROPRIO

$$\frac{DV^{\mu}}{D\tau} = \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} \cdot \frac{dx^{\nu}}{d\tau} V^{\lambda}$$

DERIVATA DI UNA VARIAZIONE PER TRASPORTO PARALLELO LUNGO UNA TRAIETTORIA DEFINITA DAL PARAMETRO τ

TRASPORTO PARALLELO LUNGO UN PERCORSO CHIUSO:

$$\Delta V_{\mu} = \oint \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} \frac{dx^{\nu}}{d\tau} S_{\mu}\, d\tau$$

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}(x) = \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}(X) + \frac{\partial \Gamma^{\lambda}}{\partial x^{e}}(X)\left(x^{e} - X^{e}\right)$$

$$V_{\lambda}(x) = V_{\lambda}(X) + \frac{\partial V_{\lambda}}{\partial x^{e}}(X)\left(x^{e} - X^{e}\right)$$

$$\Delta V_{\mu} = \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}(X) V_{\lambda}(X) \underbrace{\oint dx^{\nu}}_{=0} +$$

$$+ \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}}{\partial x^{e}}(X) V_{\lambda}(X) \oint x^{e} dx^{\nu} + \Gamma^{\eta}_{\mu\nu}(X)\, \Gamma^{\lambda}_{\eta e}(X) V_{\lambda}(X) \oint x^{e} dx^{\nu} =$$

$$\left(\text{POICHÉ} \quad \oint x^{e} dx^{\nu} = \underbrace{\oint d(x^{e} x^{\nu})}_{=0} - \oint x^{\nu} dx^{e}\right)$$

$$= -\frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu e}}{\partial x^{\nu}}(X) V_{\lambda} \oint x^{e} dx^{\nu} - \Gamma^{\eta}_{\mu e}(X)\, \Gamma^{\lambda}_{\eta\nu} V_{\lambda} \oint x^{e} dx^{\nu}$$

$$\Delta V_{\mu} = R^{\lambda}{}_{\mu\nu e} V_{\lambda} \boxed{\frac{1}{2}\oint x^{e} dx^{\nu}}$$

ΔV_μ: VARIAZIONI DEL VETTORE $\vec{S}$

$R^{\lambda}{}_{\mu\nu e}$: CURVATURA

VETTORE $\vec{S}$ — ΔS = AREA DELIMITATA DAL PERCORSO CHIUSO

$$\boxed{R^{\lambda}{}_{\mu\nu e} = \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}}{\partial x^{e}} - \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu e}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma^{\eta}_{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}_{\eta e} - \Gamma^{\eta}_{\mu e}\Gamma^{\lambda}_{\eta\nu}}$$

TENSORE DI CURVATURA DI RIEMANN

DOVE
$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda e}\left(\frac{\partial g_{\mu e}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{e\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{e}}\right)$$

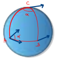
(SIMBOLO DI CHRISTOFFEL O CONNESSIONE AFFINE)

$$\frac{\Delta V}{V} \simeq \alpha$$

ANGOLO DI ROTAZIONE DEL VETTORE $\vec{S}$ TRASPORTATO PARALLELAMENTE LUNGO UN PERCORSO CHIUSO.

$$\boxed{\text{CURVATURA} = \frac{\alpha \ (\text{ROTAZIONE DEL VETTORE})}{\Delta S \ (\text{AREA DELIMITATA})}}$$

$\overset{\triangle}{ABC}$ TRIANGOLO SFERICO



$$\Delta S : 2\pi R^{2} = \alpha : 2\pi$$

$$\Delta S = \alpha R^{2}$$

$$C = \frac{\alpha}{\alpha R^{2}} = \frac{1}{R^{2}}$$

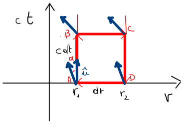
CURVATURA DI UNA SFERA DI RAGGIO R.

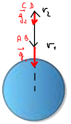
UN SEMPLICE CALCOLO DELLA CURVATURA SPAZIOTEMPORALE

DIREZIONI:

(1) ALTO-BASSO (RADIALE)

(2) DESTRA-SINISTRA E AVANTI-INDIETRO





SPOSTIAMO IL VETTORE UNITARIO

$\hat{u} = (\beta\gamma ; \gamma)$ CON $\beta = \frac{v}{c}$ E $\gamma \approx 1$ $\Rightarrow$ $|\hat{u}| = 1$

$$\approx \left(\frac{v}{c} ; 1\right)$$

SI PARTE DA $v = 0$

- $A \to B$ $r = r_1$ COST. $\Rightarrow$ DIREZIONE t (L'ACCELERAZIONE DI GRAVITÀ g_1 FA AUMENTARE LA VELOCITÀ DI CADUTA $\Downarrow$ ROTAZIONE ANTIORARIA DI $\hat{u}$)

$$d\frac{v_1}{c} = -g_1\,dt = -\frac{GM}{c r_1^2}\,dt$$

- $B \to C$ $t =$ COST. $\Rightarrow$ DA r_1 A r_2 NESSUNA ROTAZIONE

- $C \to D$ $r = r_2$ COST. $\Rightarrow$ DIREZIONE t CON INVERSIONE TEMPORALE (L'ACCELERAZIONE DI GRAVITÀ g_2 È INFERIORE E PROVOCA UNA ROTAZIONE ORARIA DI $\hat{u}$ MINORE)

$$d\frac{v_2}{c} = g_2\,dt = \frac{GM}{r_2^2}\,dt$$

- $D \to A$ $t =$ COST. $\Rightarrow$ DA r_1 A r_2 NESSUNA ROTAZIONE

ROTAZIONE TOTALE ANTIORARIA CON $r_1 = r$ $r_2 = r + dr$

$$d\frac{v_2}{c} - d\frac{v_1}{c} = \left[\frac{1}{(r+dr)^2} - \frac{1}{r^2}\right] GM\frac{dt}{c} =$$

$$= \frac{GM}{c}\frac{(\cancel{r^2} - \cancel{r^2} - 2r\,dr - dr^2)}{(r+dr)^2 r^2} \approx$$

TRASCURANDO I TERMINI DI II° ORDINE IN dr PERCHÉ $dr \ll r$

$$\approx -\frac{2GM}{c r^3}\,dt\,dr$$

DIVIDENDO PER L'AREA DEL RETTANGOLO SPAZIOTEMPORALE DESCRITTO (LATI dr E $c\,dt$)

$\Downarrow$

CURVATURA DEL PIANO t-r $\quad C = -\frac{2GM}{c r^3}\frac{\cancel{dt}\,\cancel{dr}}{c\,\cancel{dt}\,\cancel{dr}} = \boxed{-\frac{2GM}{c^2 r^3}}$

ANALISI DELLE UNITÀ DI MISURA

$$G \to \frac{N \cdot m^2}{Kg^2} = Kg\frac{m \cdot m^3}{s^2 \cdot Kg^2} = \frac{m^3}{s^2 \cdot Kg}$$

$M \to Kg$

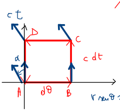
$c^2 \to \frac{m}{s^2}$

$r^3 \to m^3$

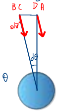
$\Downarrow$

$$-\frac{2GM}{cr^3} \to \frac{\cancel{m^3}}{\cancel{s^2}\,\cancel{Kg}} \cdot \frac{\cancel{Kg}}{\frac{m^2}{\cancel{s^2}}\,\cancel{m^3}} = \boxed{\frac{1}{m^2}}$$

UNITÀ DI MISURA DELLA CURVATURA



$r \operatorname{sen}\theta \approx r\theta$



$t =$ COSTANTE

$A \to B$ SPOSTAMENTO $r\,d\theta$

NESSUNA ROTAZIONE

$B \to C$ $r\,d\theta$ COSTANTE

SPOSTAMENTO TEMPORALE dt

L'ACCELERAZIONE DI GRAVITÀ g PRODUCE

$$d\frac{v}{c} \approx \frac{GM}{cr^2}\,d\theta\,dt$$

$C \to D$ $t =$ COSTANTE

SPOSTAMENTO $-r\,d\theta$

NESSUNA ROTAZIONE

$D \to A$ SPOSTAMENTO TEMPORALE $-dt$

$r\,d\theta$ COSTANTE

L'ACCELERAZIONE DI GRAVITÀ È RADIALE E NON CAMBIA LA COMPONENTE TRASVERSALE DELLA VELOCITÀ E DEL VETTORE $\frac{v}{c}$.

QUINDI LA ROTAZIONE È

$$\frac{dv}{c} = \frac{GM}{cr^2}\,d\theta\,dt$$

$\Leftarrow$

E LA CURVATURA DIVENTA

$$C = \frac{GM}{cr^2}\frac{\cancel{d\theta}\,\cancel{dt}}{r\,\cancel{d\theta} \cdot c\,\cancel{dt}} = +\frac{GM}{cr^3}$$

ROTAZIONE DEL VETTORE NEL VERSO DEL PERCORSO $\Rightarrow$ CURVATURA POSITIVA

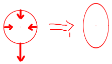
ROTAZIONE DEL VETTORE IN VERSO OPPOSTO A QUELLO DEL PERCORSO $\Rightarrow$ CURVATURA NEGATIVA.

CURVATURA CONTRATTILE E NON CONTRATTILE.

1) CASO DELLO SPAZIOTEMPO NEL VUOTO (ESTERNAMENTE ALLA MASSA)

CURVATURA DELLA SUPERFICIE r-t (ALTO-BASSO) $C_{rt} = -\frac{2GM}{r^3}$ RETTE PARALLELE DIVERGENTI NELLO SPAZIO TEMPO

CURVATURE DELLE SUPERFICI θ-t E φ-t $C_{\theta t} = C_{\varphi t} = +\frac{GM}{r^3}$ RETTE PARALLELE CONVERGENTI



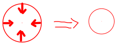
$$C_{rt} + C_{\theta t} + C_{\varphi t} = 0$$

DILATAZIONE LUNGO r E CONTRAZIONE LUNGO θ E φ SI COMPENSANO $\Rightarrow$ NEL VUOTO CURVATURA NON CONTRATTILE

1) CASO DELLO SPAZIOTEMPO INTERNAMENTE ALLA MASSA

CURVATURA DELLA SUPERFICIE r-t (ALTO-BASSO) $C_{rt} = +\frac{GM}{r^3}$ RETTE PARALLELE CONVERGENTI NELLO SPAZIO TEMPO

CURVATURE DELLE SUPERFICI θ-t E φ-t $C_{\theta t} = C_{\varphi t} = +\frac{GM}{r^3}$ RETTE PARALLELE CONVERGENTI NELLO S.-T.



$$C_{rt} + C_{\theta t} + C_{\varphi t} > 0$$

CONTRAZIONE IN TUTTE LE DIREZIONI $\Rightarrow$ NEL VUOTO CURVATURA CONTRATTILE

CURVATURA E DISTRIBUZIONE DI MASSA/ENERGIA

IL TENSORE DI CURVATURA PUÒ ESSERE RIDOTTO A 2 DIMENSIONI MEDIANTE UNA OPERAZIONE CHE SI CHIAMA "CONTRAZIONE".

$$A = \{a_{ij}\}_{i,j=1,2} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix} \Rightarrow Tr\, A = a_{11} + a_{22}$$

DA 4 TERMINI A 1

$$\| a_{ijkl} \|_{i,j,k,l=1,2} \Rightarrow \begin{Vmatrix} a_{1111} + a_{1122} & a_{1211} + a_{1222} \\ a_{2111} + a_{2122} & a_{2211} + a_{2222} \end{Vmatrix}$$

DA 16 TERMINI → A 4

$$Tr \begin{Vmatrix} u_x v_x & u_x v_y & u_x v_z \\ u_y v_x & u_y v_y & u_y v_z \\ u_z v_x & u_z v_y & u_z v_z \end{Vmatrix} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z = \vec{u} \cdot \vec{v}$$

$$R_{\mu\nu} = R^{\lambda}{}_{\mu\nu\lambda} = \left(\frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} - \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma^{m}_{\mu\nu} \Gamma^{\lambda}_{m\lambda} - \Gamma^{m}_{\mu\lambda} \Gamma^{\lambda}_{m\nu} \right)$$

TENSORE DI RICCI-CURBASTRO

OGNI TERMINE RAPPRESENTA LA CURVATURA DI UNA FACCIA BIDIMENSIONALE DI UN TRICUBO CHE FA PARTE DEL CONTORNO DI UN

TETRACUBO !!!

(CUBO A 4 DIMENSIONI)

TETRACUBO

$0 \le x \le 1$
$0 \le y \le 1$
$0 \le z \le 1$
$0 \le ct \le 1$

OGNI SUPERFICIE DI CONTORNO DI UN TRICUBO COLLEGA 2 TRICUBI DEL CONTORNO DEL 4-CUBO

ESEMPIO: $x = 0$ $y = 0$

METTE IN COMUNICAZIONE CON

$0 \le x \le 1$
$0 \le y \le 1$
$0 \le z \le 1$

$0 \le x \le 1$
$0 \le y \le 1$
$0 \le ct \le 1$

$x = 0$ $ct = 1$

METTE IN COMUNICAZIONE CON

$0 \le x \le 1$
$0 \le y \le 1$
$0 \le ct \le 1$

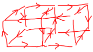
$0 \le x \le 1$
$0 \le z \le 1$
$0 \le ct \le 1$

DAL QUADRICUBO NON SI ESCE!!

PERTANTO LA MASSA/ENERGIA CONTENUTA IN UN QUADRICUBO È COSTANTE.

$E = mc^2$ $\quad \mathcal{E} = \frac{dE}{dV^4} = \frac{dE}{dx\,dy\,dz\,cdt}$ = COSTANTE

$\frac{1}{c}\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = 0 \implies$ IL FLUSSO DI MASSA/ENERGIA SOMMATO SU TUTTE LE FACCE BIDIMENSIONALI DEL TETRACUBO DÀ 0.



MA ANCHE LA SOMMA DI TUTTE LE ROTAZIONI SU TUTTE LE FACCE DEL QUADRICUBO È 0!

POICHÉ LA CURVATURA È $\frac{\text{ROTAZIONE}}{\text{AREA}} = \frac{\text{ROTAZIONE} \times \text{LUNGHEZZA TRASVERSALE}}{\text{VOLUME}} =$

$= \frac{\alpha \cdot dz}{dx\,dy\,dz} = \frac{\alpha}{dx\,dy} = \frac{\text{ROTAZIONE}}{\text{AREA DESCRITTA}}$

E IL FLUSSO DI MASSA/ENERGIA LUNGO UNA FACCIA

$$\frac{\text{MASSA/ENERGIA}}{\text{SUPERFICIE TRASVERSALE} \times \text{TEMPO}} = \frac{dE}{dx\,dy\,cdt}$$

POICHÉ L'ENERGIA È DIR. PROP. ALLA COMPONENTE TEMPORALE DEL QUADRIVETTORE $\left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right)$

$$\frac{dE}{dx\,dy\,cdt} \propto \frac{\alpha}{dx\,dy}$$

$$\left[\text{INFATTI} \quad C_{rt} = -\frac{2GM}{c^2 r^3} \right]$$

DA CIÒ SEGUONO LE EQUAZIONI DI CAMPO DI EINSTEIN

$$\underbrace{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R^{\mu}{}_{\mu}}_{\text{CURVATURA SPAZIO TEMPORALE}} = -\frac{8\pi G}{c^4} \underbrace{T_{\mu\nu}}_{\text{DENSITÀ/FLUSSO DI MASSA/ENERGIA}}$$

OPPURE

$$R_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4} S_{\mu\nu} \quad \text{DOVE} \quad S_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} T^{\mu}{}_{\mu}$$

BIBLIOGRAFIA:

J. A. WHEELER:
"SPAZIO-TEMPO E GRAVITAZIONE" (ZANICHELLI)