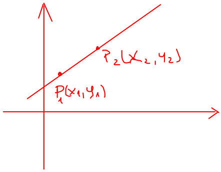
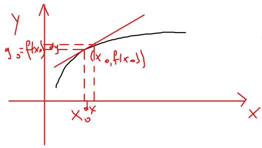
UNA FUNZIONE QUALSIASI SI PUÒ APPROSSIMARE CON UN POLINOMIO



RETTA

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$$

$$\boxed{y = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot (x - x_1) + y_1}$$



$$f(x) = f(x_0) + \frac{df}{dx}(x_0)(x - x_0)$$

$$f(x) = f(x_0) + k(x - x_0) \qquad (k = f'(x_0))$$

APPROSSIMAZIONE AL PRIMO ORDINE DI UNA FUNZIONE IN UN "INTORNO" DI x_0

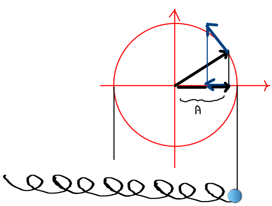
APPROSSIMAZIONE DI UNA FUNZIONE IN UN INTORNO DI x_0 CON UN POLINOMIO DI GRADO m

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)(x - x_0)}_{\text{I° ORDINE}} + \underbrace{\frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2}_{\text{II° ORDINE}} + \frac{1}{6} f'''(x_0)(x - x_0)^3 + \dots$$

$(m! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \dots \cdot m)$ $\quad \dots \frac{1}{m!} f^{(m)}(x_0)(x - x_0)^m$

(m^{mo} ORDINE)

Energia nel moto armonico e potenza trasmessa da un'onda elastica

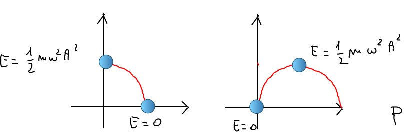


$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \operatorname{sen}^2 \omega t$$

$$E_p = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \cos^2 \omega t$$

$$E_{tot} = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 [\underbrace{\operatorname{sen}^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)}_{=1}] =$$

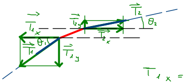
$$= \frac{1}{2} m \omega^2 \boxed{A^2}$$



POTENZA TRASMESSA

$$P = \frac{E}{t} = \frac{\frac{1}{2} m \omega^2 A^2}{\frac{T}{4}} \propto A^2$$

[LA POTENZA TRASMESSA DA UN'ONDA ELASTICA È DIRETTAMENTE PROPORZIONALE AL QUADRATO DELL'AMPIEZZA.]



$T_{1x} = -T_{2x} = T$

$T_{1y} = \operatorname{tg}\theta_1 \; T_{1x} = \frac{dy}{dx}(x_1)$

$T_{2y} = \operatorname{tg}\theta_2 \; T_{2x} = \frac{dy}{dx}(x_2)$

PER LA II^ LEGGE DELLA DINAMICA UN ELEMENTO INFINITESIMO DI CORDA ELASTICA SPOSTATO DAL PUNTO DI EQUILIBRIO SUBISCE UN'ACCELERAZIONE DA UNA FORZA NETTA TRASVERSALE

$$dm \frac{d^2y}{dt^2} = T\left[\frac{dy}{dx}(x_2) - \frac{dy}{dx}(x_1)\right]$$

$$x_2 - x_1 = dx$$

$$\frac{dy}{dx}(x_2) - \frac{dy}{dx}(x_1) = \frac{d^2y}{dx^2}\,dx$$

SEGUE CHE

$$dm \frac{d^2y}{dt^2} = T \frac{d^2y}{dx^2}\,dx$$

$\frac{dm}{dx} = \lambda$ DENSITÀ LINEARE DELLA CORDA

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T}{\lambda}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}} \qquad v = \sqrt{\frac{T}{\lambda}}$$

FUNZIONI DI UN'ONDA ELASTICA

$$\frac{T}{\lambda} \Rightarrow \frac{N}{kg/m} = \frac{kg \cdot m/s^2}{kg/m} = \frac{m^2}{s^2}$$

$\sqrt{\frac{T}{\lambda}} = v$ VELOCITÀ.

$v = \sqrt{\frac{T}{\lambda}}$ VELOCITÀ DI PROPAGAZIONE.

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$ EQUAZIONE DI D'ALEMBERT...

POSSIBILI SOLUZIONI:

PER UNA FUNZIONE $f(x - vt)$ CHE DESCRIVE UN QUALSIASI IMPULSO

SE $x - vt = u$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} = f'(u)\cdot 1 = f'(u)$$

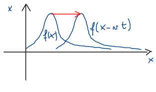
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''(u)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial t} = f'(u)\,(-v) = -v\,f'(u)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = f''(u)\cdot(-v)^2 = v^2 f''(u)$$

$$\boxed{\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}$$

v È LA VELOCITÀ DI TRASLAZIONE DELL'IMPULSO DESCRITTO DALLA FUNZIONE $y = f(x)$



SOLUZIONE ANALITICA PER SEPARAZIONE DI VARIABILI:

$$\psi(x - vt) = X(x)\cdot T(t)$$

$$\psi(x - vt) = A e^{ikx}\cdot e^{-ikvt} = \boxed{A e^{ik(x-vt)}}$$

$$\psi(x,t) = A\left[\cos(kx - \omega t + \alpha) + i \operatorname{sen}(kx - \omega t + \alpha)\right]$$

ELETTROMAGNETISMO E EQUAZIONE D'ONDA

EQUAZIONI DI MAXWELL IN FORMA DIFFERENZIALE (SISTEMA C.G.S.)

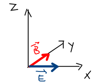
(1) $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 4\pi\rho$

(2) $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$

(3) $\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$

(4) $\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\left(\vec{J}_s + \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$ NEL VUOTO $\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$

FORMA SEMPLIFICATA NEL VUOTO CON $\vec{B} = (0, B_y, 0)$ $\vec{E} = (E_x, 0, 0)$



$$\begin{cases} \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} & (3) \\ -\frac{\partial B_y}{\partial z} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial E_x}{\partial t} & (4) \end{cases}$$

APPLICO

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &\rightarrow \frac{\partial^2 E_x}{\partial z\partial t} = -\frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2} \\ \frac{\partial}{\partial z} &\rightarrow -\frac{\partial^2 B_y}{\partial z^2} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 E_x}{\partial z\partial t} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 B_y}{\partial z^2} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2}$$

APPLICO

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} &\rightarrow \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = -\frac{\partial^2 B_y}{\partial z\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial t} &\rightarrow -\frac{\partial B_y}{\partial t\partial z} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}$$

EQUAZIONE DI D'ALEMBERT (ONDE TRASVERSALI CHE SI PROPAGANO LUNGO Z)

$\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}\ \frac{N}{A^2}$

$\varepsilon_0 = 8{,}9\cdot 10^{-12}\ \frac{C^2}{N\cdot m^2}$

$\Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} \simeq 3\cdot 10^8\ \frac{m}{s} = c$ "CELERITAS" (VELOCITÀ DELLA LUCE)

Per l'elettromagnetismo classico i campi elettromagnetici si possono interpretare come perturbazioni di un mezzo elastico (l' "etere") che viaggiano con la velocità della luce

Ma per il secondo principio di relatività l'etere non esiste (come dimostrato dell'esperimento di Michelson e Morley). Come la mettiamo?

Il formalismo tensoriale covariante aggiusta tutto!

Nello spaziotempo si introduce il 4-vettore "potenziale" $\Longrightarrow \left(\overset{A_0}{\varphi};\ \overset{A_1}{A_x}, \overset{A_2}{A_y}, \overset{A_3}{A_z}\right)$

componente temporale = potenziale elettrostatico

componenti spaziali = 3-vettore potenziale elettromagnetico

$\vec{E} = \underbrace{\vec{\nabla}\varphi}_{\text{STATICO}} - \underbrace{\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}}_{\text{DINAMICO}}$ $\qquad \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$

derivate covarianti

$$\partial_\alpha = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t};\ \frac{\partial}{\partial x};\ \frac{\partial}{\partial y};\ \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$\partial^\alpha = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t};\ -\frac{\partial}{\partial x};\ -\frac{\partial}{\partial y};\ -\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$\Longrightarrow \partial^\alpha\partial_\alpha = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

operatore di Laplace o "laplaciano" 4-dimensionale

Tensore campo elettromagnetico

$$F^{\alpha\beta} = \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_x \\ E_y & B_z & 0 & -B_y \\ E_z & -B_x & B_y & 0 \end{pmatrix}$$

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \partial_\alpha\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta\partial_\alpha A^\alpha = \Box A^\beta - \partial^\beta(\partial^\alpha A_\alpha)$$

SEGUE →

Equazioni di Maxwell in forma tensoriale

(5) $\partial^\alpha F^{\beta\gamma} + \partial^\beta F^{\gamma\alpha} + \partial^\gamma F^{\alpha\beta} = 0$ (1) E (3)

(6) $\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{c} J^\beta$

J^α = 4-VETTORE DENSITÀ DI CORRENTE

$\downarrow$ (2) E (4)

DALLA (6) SI HA

$$\Box A^\beta - \partial^\beta (\partial_\alpha A^\alpha) = \frac{4\pi}{c} J^\beta$$

$\downarrow$

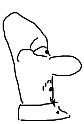
$\partial_\alpha A^\alpha = 0$ CONDIZIONE DEL GAUGE DI LORENTZ ("SCELTA" PER IL POTENZIALE)

$$\Box A^\beta = \frac{4\pi}{c} J^\beta$$

$\Downarrow$

NEL VUOTO

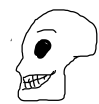
$\Box A^\beta = 0$ CIOÈ



$$\boxed{\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A^\beta}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 A^\beta}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A^\beta}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A^\beta}{\partial z^2} = 0}$$

EQUAZIONE DI D'ALEMBERT PER LE ONDE ELASTICHE TRASVERSALI

Etere o non etere ... non è più un dilemma! L'equazione d'onda trasversale salta fuori sempre.



RISOLUZIONE

$$A^\alpha(x) = \frac{1}{cR} \int d^4x' \; \underline{\theta(x_0 - x_0')\, \delta(x_0 - x_0' + R)\, J^\alpha(x')}$$

distanza dell'osservatore dalla sorgente

Distribuzione della carica e delle correnti al momento della partenza dell'onda e.m.)

DALLE EQUAZIONI DI CAMPO A .....

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} + \Gamma^{\eta}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\eta\nu} - \Gamma^{\eta}_{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}_{\eta\lambda}$$

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho}\left(\frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}}\right)$$

A grande distanza dalla massa che provoca la curvatura dello spaziotempo possiamo "linearizzare" la metrica approssimandola al primo ordine rispetto a quella dello spaziotempo piatto

CAMPO GRAVITAZIONALE $\propto \frac{1}{r^2}$

CURVATURA (DISOMOGENEITÀ) $\propto \frac{1}{r^3}$

$\Downarrow$

SPAZIO TEMPO "QUASI PIATTO"

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \underline{\underline{h_{\mu\nu}}}$$

Questa operazione si chiama linearizzazione

APPROSSIMAZIONE AL PRIMO ORDINE DEL TENSORE METRICO $g_{\mu\nu}$

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}$$

TENSORE DI RICCI LINEARIZZATO

$$R^{(1)}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 h_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}\partial x_{\lambda}} + \frac{\partial^2 h^{\lambda}_{\lambda}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\nu}} - \frac{\partial^2 h^{\lambda}_{\mu}}{\partial x^{\lambda}\partial x^{\nu}} - \frac{\partial^2 h^{\lambda}_{\nu}}{\partial x^{\lambda}\partial x^{\mu}}\right)$$

SCELTA CONVENIENTE DI "GAUGE" $\longrightarrow g^{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = 0$

(VALIDA PER TUTTI I SIST. DI RIF.)

$$g^{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\eta^{\lambda\rho}\left(\frac{\partial h_{\mu\rho}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial h_{\rho\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial h^{\lambda}_{\mu}}{\partial x_{\mu}} + \frac{\partial h^{\lambda}_{\nu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial h^{\mu}_{\mu}}{\partial x_{\lambda}}\right) =$$

$$= \frac{\partial h^{\lambda}_{\mu}}{\partial x_{\mu}} - \frac{1}{2}\frac{\partial h^{\mu}_{\mu}}{\partial x_{\lambda}} = 0$$

DA CUI SI RICAVA LA FORMA EQUIVALENTE

$$\frac{\partial h^{\lambda}_{\mu}}{\partial x^{\lambda}} - \frac{1}{2}\frac{\partial h^{\lambda}_{\lambda}}{\partial x^{\mu}} = 0 \quad \text{E}$$

LE DERIVATE

$$\frac{\partial^2 h^{\lambda}_{\mu}}{\partial x^{\nu}\partial x^{\lambda}} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 h^{\lambda}_{\lambda}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\nu}} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 h^{\lambda}_{\nu}}{\partial x^{\lambda}\partial x^{\mu}} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 h^{\lambda}_{\lambda}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\nu}} = 0$$

CHE APPLICATE AL TENSORE DI RICCI LINEARIZZATO DANNO:

$$R^{(1)}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 h_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}\partial x_{\lambda}} = \Box h_{\mu\nu}$$

LE EQUAZIONI CAMPO DI EINSTEIN NELLA FORMA

$$R^{(1)}_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} S_{\mu\nu} \qquad \left(S_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T^{\lambda}_{\lambda}\right)$$

CHE FUORI DALLA "SORGENTE" (NEL VUOTO) DIVENTANO

$$\frac{\partial^2 h_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}\partial x_{\lambda}} = 0 \Longrightarrow \Box h_{\mu\nu} = 0$$

CIOÈ

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 h_{\mu\nu}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 h_{\mu\nu}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 h_{\mu\nu}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 h_{\mu\nu}}{\partial z^2} = 0$$

EQUAZIONE DI D'ALEMBERT 3-d !!

CIOÈ ...

ALLORA ANCHE LO SPAZIOTEMPO
PUÒ ESSERE CONSIDERATO UN
MEZZO "ELASTICO" INCURVATO
DA UNA MASSA/ENERGIA....

CHE OSCILLANDO PUÒ GENERARE
UN'ONDA CHE SI PROPAGA
TRASVERSALMENTE CON VELOCITÀ c

$$c \approx 3 \cdot 10^8 \ m/s.$$

CI HAI AZZECCATO D'ALEMBERT!

RISOLUZIONE DELL'EQUAZIONE DELLE ONDE GRAVITAZIONALI NEL VUOTO

LA SOLUZIONE TIPICA

$$h_{\mu\nu} = e_{\mu\nu}\, e^{i K_\lambda x^\lambda} + e^*_{\mu\nu}\, e^{-i K_\lambda x^\lambda}$$

APPLICATA ALLE EQUAZIONI

(1) $\Box\, h_{\mu\nu} = 0$

(2) $$\frac{\partial h^\mu_\lambda}{\partial x^\mu} - \frac{1}{2}\frac{\partial h^\mu_\mu}{\partial x^\lambda} = 0$$

DÀ LE CONDIZIONI

(1') $K^\lambda K_\lambda = 0 \implies \frac{\omega^2}{c^2} - K^2 = 0 \implies c = \frac{K}{\omega}$

LE ONDE GRAVITAZIONALI SI PROPAGANO CON LA VELOCITÀ DELLA LUCE.

Vagonata di calcoli

(2') $K_\mu e^\mu{}_\lambda = \frac{1}{2} K_\lambda e^\mu{}_\mu \implies \begin{cases} -e_{03} + e_{33} = \frac{1}{2}(e_{00} + e_{11} + e_{22} + e_{33}) \\ -e_{00} + e_{30} = \frac{1}{2}(-e_{00} + e_{11} + e_{22} + e_{33}) \end{cases}$

$e_{01} + e_{31} = 0$ $\quad e_{30} = e_{03} = \frac{e_{00} + e_{33}}{2}$

$e_{02} + e_{32} \; 0$

$\Downarrow$

$e_{22} = -e_{11}$; $e_{31} = -e_{01}$; $e_{32} = -e_{02}$; $e_{03} = e_{30} = \frac{e_{00} + e_{33}}{2}$

Vagonata di calcoli

IN UN SISTEMA DI COORDINATE CONVENIENTE

$x'^\mu = x^\mu + \varepsilon^\mu$

CON $\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho}\left(\eta^{\rho\sigma} - h^{\rho\sigma}\right)\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\sigma} = \eta^{\mu\nu} - h'^{\mu\nu}$

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{\partial \varepsilon_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \varepsilon^\nu}{\partial x^\mu}$$

IN CUI $\varepsilon_0 = \frac{e_{00}}{2K}$ $\quad \varepsilon_1 = -\frac{e_{12}}{K}$ $\quad \varepsilon_2 = -\frac{e_{23}}{K}$ $\quad \varepsilon_3 = -\frac{e_{33}}{2K}$

TUTTI I TERMINI DEL TENSORE $e_{\mu\nu}$ SI ANNULLANO TRANNE

e_{11}, e_{22}, e_{12}, e_{21}

$\Downarrow$

IN UN'ONDA GRAVITAZIONALE CHE SI PROPAGA LUNGO LA DIREZIONE CARTESIANA z I TERMINI INDIPENDENTI DEL TENSORE SONO QUELLI RELATIVI LE DIREZIONI x E y ; CIÒ DETERMINA IL FATTO CHE LE DIREZIONI DELLO SPAZIO SOGGETTE A CONTRAZIONE / DILATAZIONE SONO LE DIREZIONI x, y.

$$dl^2 = (1 - h_{11})dx^2 + h_{12}\,dx\,dy + h_{21}\,dy\,dx + (1 - h_{22})dy^2 =$$

$$= (1 - h_{11})dx^2 + 2h_{12}\,dx\,dy + (1 + h_{11})dy^2 =$$

$$= \left(1 - e_{11}\cos(\omega t)\right)dx^2 + 2h_{12}\,dx\,dy + \left(1 + e_{11}\cos(\omega t)\right)dy^2$$

$\Downarrow$ $\quad\quad$ $\Downarrow$

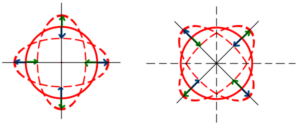
OSCILLAZIONE MECCANICA LUNGO x $\quad\quad$ OSCILLAZIONE MECCANICA LUNGO y

COMPONENTE xx $\quad\quad$ COMPONENTE yy

$\left(1 - \frac{1}{2}e_{11}\cos(\omega t)\right) \leftarrow$ CURVATURA NON CONTRATTILE $\rightarrow \left(1 + \frac{1}{2}e_{11}\cos(\omega t)\right)$

POLARIZZAZIONE DELLE ONDE GRAVITAZIONALI

Due direzioni di polarizzazione inclinate di 45°



Vagonata di calcoli

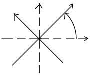
RUOTIAMO IL TENSORE DELLE AMPIEZZE DI UN ANGOLO θ: SI FA COSÌ

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{R^T(\theta)} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_{11} & e_{12} & 0 \\ 0 & e_{12} & -e_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ 0 & -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{R(\theta)} =$$

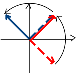
$\downarrow$ CALCOLI ...

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_{11}\cos 2\theta - e_{12}\operatorname{sen} 2\theta & e_{11}\operatorname{sen} 2\theta + e_{12}\cos 2\theta & 0 \\ 0 & e_{11}\operatorname{sen} 2\theta + e_{12}\cos 2\theta & -e_{11}\cos 2\theta + e_{12}\operatorname{sen} 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

RUOTANDO DI UN ANGOLO θ IL TENSORE DI POLARIZZAZIONE I VETTORI COLONNA SONO RUOTATI DI 2θ....



$\theta = \frac{\pi}{4} \longrightarrow 2\theta = \frac{\pi}{2}$

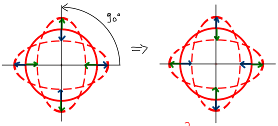


RUOTANDO DI $\frac{\pi}{2} \longrightarrow$ LE COLONNE DEL TENSORE VENGONO OPPOSTE, CIOÈ IL TENSORE CAMBIA SOLTANTO DI SEGNO, MA LE ORIENTAZIONI SPAZIALI (X Y) CHE ESPRIME SONO SEMPRE LE STESSE.

IN PRATICA SE IL TENSORE DI POLARIZZAZIONE CAMBIA SOLO PER UN FATTORE NUMERICO; LE DIREZIONI DI POLARIZZAZIONE RESTANO LE STESSE

⇓

DEL RESTO PROVATE A PENSARCI



CAMBIATO QUALCOSA?

ECCO QUAL È IL SIGNIFICATO DEI SIMBOLI MATEMATICI DI PRIMA! ...

MA PERCHÉ È COSÌ IMPORTANTE LA POLARIZZAZIONE DELLE ONDE?

PERCHÉ, COME PER LE ONDE EL./MAGN., AVERE INFORMAZIONI SULLA POLARIZZAZIONE È AVERE INFO SULLE DIREZIONI DEL MOTO DELLA SORGENTE.

⇓ PROBLEMA SUCCESSIVO: VEDIAMO CHE RELAZIONE C'È TRA ONDE GRAVITAZIONALI E MOTO PER VEDERE IN DETTAGLIO QUALI INFORMAZIONI POSSIAMO RICAVARE DALLE ONDE GRAVITAZIONALI SUGLI OGGETTI CELESTI CHE LE PRODUCONO.

SOLUZIONE DELLE EQUAZIONI DI CAMPO LINEARIZZATE (CONTENENTI LA SORGENTE)

$\Downarrow$

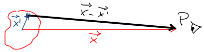
RELAZIONE TRA IL TENSORE METRICO $h_{\mu\nu}$ E LA DISTRIBUZIONE DI MASSA/ENERGIA

$$\Box h_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} S_{\mu\nu}$$

$\Downarrow$

ISTANTE DI PARTENZA DEL SEGNALE

$$h_{\mu\nu} = \frac{4G}{c^4}\int d^3\vec{x}'\, \frac{S_{\mu\nu}\left(\vec{x}', t - \frac{|x-x'|}{c}\right)}{|\vec{X}-\vec{x}'|}$$



PER UNA SORGENTE OSCILLANTE CON PULSAZIONE $\omega = \frac{2\pi}{T}$

$$h_{\mu\nu}(x,t) = \frac{4G}{c^4}\int \frac{d^3x'\, S_{\mu\nu}(\vec{x}',\omega)\, e^{-i\omega\left(t - \frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{c}\right)}}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

PER $|\vec{x}| = r$ E $|\vec{x}'| \ll r$

$\Downarrow$

$$|x - x'| \approx r - \vec{x}'\cdot\hat{r} \approx r$$

$$\boxed{h_{\mu\nu}(x,t) \approx \frac{4G}{r}\, e^{-i\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)} \int d^3\vec{x}'\, S_{\mu\nu}(x',\omega)\, e^{-i\,\vec{x}'\cdot\vec{k}}}$$

↑ ISTANTE "RITARDATO"

$$\vec{k} = \frac{\omega}{c}\hat{r}$$

DOVE L'AMPIEZZA DELL'ONDA È

$$e_{\mu\nu}(x,\omega) = \frac{4G}{r}\int d^3\vec{x}'\, S_{\mu\nu}(x',\omega)\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}'}$$

Equazioni di campo linearizzate in una regione dello spaziotempo interessata dal passaggio di onde gravitazionali

$$R^{(1)}_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} R^{(1)} = -\frac{8\pi G}{c^4}\left(T_{\mu\nu} + t_{\mu\nu}\right)$$

Distribuzione di massa/energia della sorgente

Energia trasportata dalle onde

Equazioni generali di campo di Einstein

$$R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} R = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

Ricaviamo l'energia trasportata dalle onde gravitazionali (sottraendo membro a membro)

$$R^{(1)}_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}^{(1)} - R_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} R = -\frac{8\pi G}{c^4} t_{\mu\nu}$$

$$t_{\mu\nu} = \frac{c^4}{8\pi G}\left(R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}R - R^{(1)}_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu}R^{(1)}\right)$$

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$$

$\Downarrow$

Approssimazioni al secondo ordine del tensore di curvatura diRicci

$$t_{\mu\nu} = \frac{c^4}{8\pi G}\left(\cancel{\eta^{\lambda\kappa} h_{\lambda\kappa} R^{(1)}_{\mu\nu}} + \eta^{\lambda\kappa}\eta_{\lambda\kappa} R^{(2)}_{\mu\nu} - \cancel{h_{\mu\nu}\eta^{\lambda\kappa} R^{(1)}_{\lambda\kappa}} - \eta_{\mu\nu}\eta^{\lambda\kappa} R^{(2)}_{\lambda\kappa}\right)$$

Tensore energia/momento trasportati dalle onde

$$\boxed{t_{\mu\nu} = \frac{c^4}{8\pi G}\left(R^{(2)}_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}\eta^{\lambda\kappa} R^{(2)}_{\lambda\kappa}\right)} \Rightarrow$$

Vagonata di calcoli

Vagonata di calcoli

$$\Downarrow$$

$$\langle t_{\mu\nu} \rangle = \frac{c^4}{8\pi G} k_\mu k_\nu \left(|e_{xx}|^2 + |e_{xy}|^2 \right)$$

Numero d'onda

Ampiezze delle oscillazioni del tensore che descrive le onde gravitazionali (oscillazioni trasversali)

$$\Downarrow$$

Stravagonata di calcoli!

$$\Downarrow$$

$$\frac{dP}{d\Omega} = r^2 \hat{x}^i \langle t_{0i} \rangle c$$

$$\Downarrow$$

Potenza trasportata dall'onda gravitazionale (in funzine della distribuzione di massa/ energia della sorgente

$$P = \frac{2G\omega^6}{5c^5} \left(\sum_{i,j=1}^{3} |D_{ij}|^2 - \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{3} |D_{ii}|^2 \right) = \frac{2G}{5c^5} |\dddot{Q}|^2$$

DOVE

$$D_{ij} = \int \rho\, x_i x_j\, d^3\vec{x} \Rightarrow Q_{ij} = \int \rho \left(x_i x_j - \frac{1}{3} r^2 \delta_{ij} \right) d^3\vec{x}$$

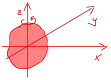
$$r^2 = \sum_{i=1}^{M} x_i^2$$

MOMENTO DI "QUADRUPOLO"

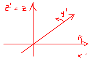
(rappresenta la distribuzione di massa/energia nella sorgente; i e j indicano le dimensioni dello spazio)

(rappresenta la deviazione della distribuzione di massa/energia nella sorgente dalla simmetria sferica)

PER UN CORPO RIGIDO IN ROTAZIONE CON VELOCITA ANGOLARE Ω INTORNO ALL'ASSE Z



CON x', y', z' COORDINATE ROTANTI SOLIDALI CON IL CORPO



$$x = x' \cos \Omega t - y' \sin \Omega t$$

$$y = x' \sin \Omega t + y' \cos \Omega t$$

$$z = z'$$

DOVE $\int x'_i x'_j \rho\, d^3x' = I_{ij}$ TENSORE DI INERZIA

$$\Downarrow$$

Vagonata di calcoli

$$\Downarrow$$

$$D_{11}(2\Omega) = -D_{22}(2\Omega) = i D_{12}(2\Omega) = \frac{1}{2}(I_{xx} - I_{yy})$$

$$\Downarrow$$

$$P(2\Omega) = \frac{32 G \Omega^6}{5c^5} \left(\frac{I_{xx} - I_{yy}}{I_{xx} + I_{yy}} \right)^2$$

OPPURE

CON $I = I_{xx} + I_{yy}$

$$e = \frac{I_{xx} - I_{yy}}{I_{xx} + I_{yy}}$$

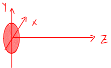
$$\boxed{P(2\Omega) = \frac{32 G \Omega^6 I^2 e^2}{5c^5}}$$

$$I_{xx} = \int \rho\, x'^2\, dx'dy'dz' \longrightarrow$$ DISTRIBUZIONE DI MASSA INTORNO AL CENTRO DI MASSA LUNGO LA DIREZIONE X

$$I_{yy} = \int \rho\, y'^2\, dx'dy'dz' \longrightarrow$$ DISTRIBUZIONE DI MASSA INTORNO AL CENTRO DI MASSA LUNGO LA DIREZIONE Y

$$I_{xx} = I_{yy}$$

SIMMETRIA ASSIALE RISPETTO ALL'ASSE Z



$$\Downarrow$$

$$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz}$$

SIMMETRIA RISPETTO AD OGNI DIREZIONE

SIMMETRIA SFERICA

$$\Downarrow$$

$$e = I_{xx} - I_{yy} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{P = 0}$$

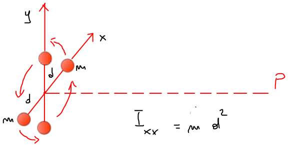
POTENZA DELLE ONDE GRAVITAZIONALI NULLA

RICEVIAMO ONDE GRAVITAZIONALI SOLTANTO DA SORGENTI CHE HANNO UNA DISTRIBUZIONE DI MASSA/ENERGIA NON SFERICA.

$P = 0$

$P \neq 0$

CASO DI UNA MASSA m ORBITANTE



$$I_{xx} = m\, d^2$$

$$I_{yy} = 0$$

NEL CASO DI UNA MASSA m ORBITANTE CON VELOCITÀ ANGOLARE Ω, LA POTENZA EMESSA IN FORMA DI RADIAZIONE GRAVITAZIONALE RISULTA

$$\boxed{P \approx \frac{32\pi G\, \Omega^6\, m^2 d^4}{5 c^5}}$$

$$\downarrow$$

PER 2 MASSE ORBITANTI RISPETTO AL LORO CENTRO DI MASSA

$\hookrightarrow$ SEGUE

PER 2 MASSE m_1 E m_2

IN ROTAZIONE INTORNO AL

CENTRO DI MASSA

$$m_1 a_1 = m_2 a_2$$

$$D_{11}(t) = \left(m_1 a_1^2 + m_2 a_2^2\right)\cos^2(\omega t)$$

$$D_{22}(t) = \left(m_1 a_1^2 + m_2 a_2^2\right)\operatorname{sen}^2(\omega t)$$

. . . . .

$$P(2\Omega) = \frac{32 G \Omega^6}{5c^2}\left(m_1 a_1^2 + m_2 a_2^2\right)^2$$

$$\Downarrow$$

$$m_1 a_1^2 + m_2 a_2^2 = m_2 a_1 a_2 + m_1 a_1 a_2 = (m_1+m_2) a_1 a_2$$

$$= \frac{(m_1+m_2)^2 a_1 a_2}{m_1+m_2} = \frac{m_1^2 a_1 a_2 + m_2^2 a_1 a_2 + 2 m_1 m_2 a_1 a_2}{m_1+m_2} =$$

$$= \frac{m_1 m_2 a_2^2 + m_1 m_2 a_1^2 + 2 m_1 m_2 a_1 a_2}{m_1 + m_2} =$$

$$= \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}(a_1+a_2)^2 = \mu a^2$$

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} \qquad a = a_1 + a_2$$

$$\Downarrow$$

$$P = \frac{32}{5}\frac{G\Omega^6}{c^5}\left(\mu a^2\right)^2$$

POTENZA EMESSA DA 2 MASSE

m_1 E m_2 IN ROTAZIONE INTORNO AL

CENTRO DI MASSA.

PER LA III^a LEGGE DI KEPLERO

$$\Omega^2 = \frac{G(m_1+m_2)}{a^3} = \frac{GM}{a^3}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{P} = \frac{32}{5}\frac{G^4}{c^5}\frac{M^3}{a^9}\mu^2 a^4 = \boxed{\frac{32}{5}\frac{G^4}{c^5}\frac{M^3\mu^2}{a^5}}$$

ENERGIA CINETICA $= \frac{1}{2}\left(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2\right) = \frac{1}{2}\left(m_1 a_1^2 + m_2 a_2^2\right)\Omega^2$

ENERGIA POTENZIALE $= -\frac{G m_1 m_2}{a}$

$$\boxed{E_{Tot} = -\frac{1}{2}\frac{G m_1 m_2}{a}}$$

LA PERDITA DI ENERGIA GRAVITAZIONALE

NELL'UNITÀ DI TEMPO A CAUSA DELLA

RADIAZIONE GRAVITAZIONALE È

$$P = \frac{dE}{dt} = \frac{1}{2}\frac{G m_1 m_2}{a^2}\boxed{\frac{da}{dt}}$$

DURANTE L'ABBRACCIAMENTO LA DISTANZA TRA I 2 CORPI DIMINUISCE (QUESTO È IL RITMO A CUI DIMINUISCE)

$$-\frac{32}{5}\frac{G^3}{c^5}\frac{M^3\mu^2}{a^5} = \frac{1}{2}\frac{GM\mu}{a^2}\frac{da}{dt}$$

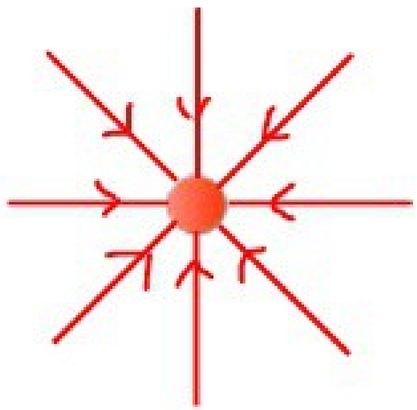
$$\Downarrow$$

$$\frac{da}{dt} = -\frac{64}{5}\frac{G^2}{c^5}\frac{M^2\mu}{a^3}$$

$$\tau = \frac{5}{256}\frac{G}{c^5}\frac{a_0^4}{M^2\mu}$$

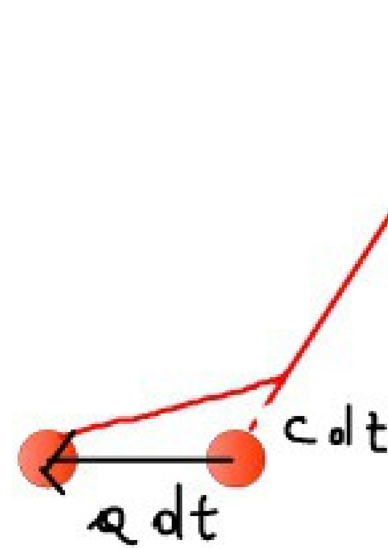
TEMPO DI COLLASSO STIMATO PER IL SISTEMA.

Proviamo a spiegare il significato con qualche ragionamento “classico”



SIA DATO UN CAMPO VETTORIALE ATTRATTIVO CON LINEE DI FORZA RADIALI, CHE POSSIAMO CONSIDERARE COME CORDE ELASTICHE, GENERATO DA UNA SORGENTE PUNTIFORME O SFERICA, IN QUIETE

Mentre la sorgente accelera, le linee di forza del campo, come corde elastiche subiscono una distorsione trasversale nel verso dell'accelerazione (quelle trasversali rispetto all'accelerazione, perché quelle parallele all'accelerazione non vengono distorte).



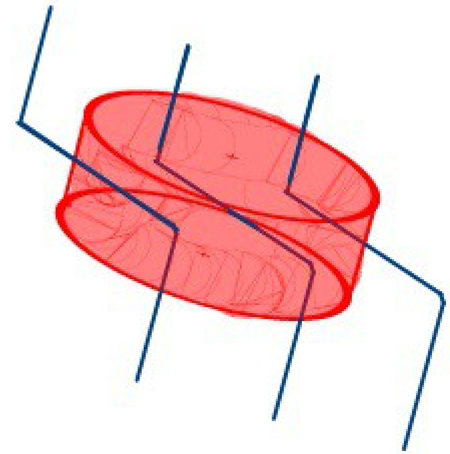
Ricaviamo ora il rapporto tra il campo trasversale (campo di radiazione) e quello radiale: esso è dato dal rapporto tra la lunghezza (c·dt) e la larghezza della distorsione ($v_\perp$·r/c)

($V_\perp$ = COMPONENTE TRASVERSALE DELLA VELOCITÀ)

$$\frac{g_\perp}{g_{\parallel}} = \frac{a_\perp \cdot dt \cdot \frac{\cancel{r}}{c}}{c\,\cancel{dt}} =$$

$$= \frac{a_\perp \cdot r}{c^2}$$

Poiché il campo radiale all'interno della distorsione è uguale a quello all'esterno (le linee di forza radiali "entranti" sono uguali a quelle "uscenti" dal cilindretto che contiene la distorsione)



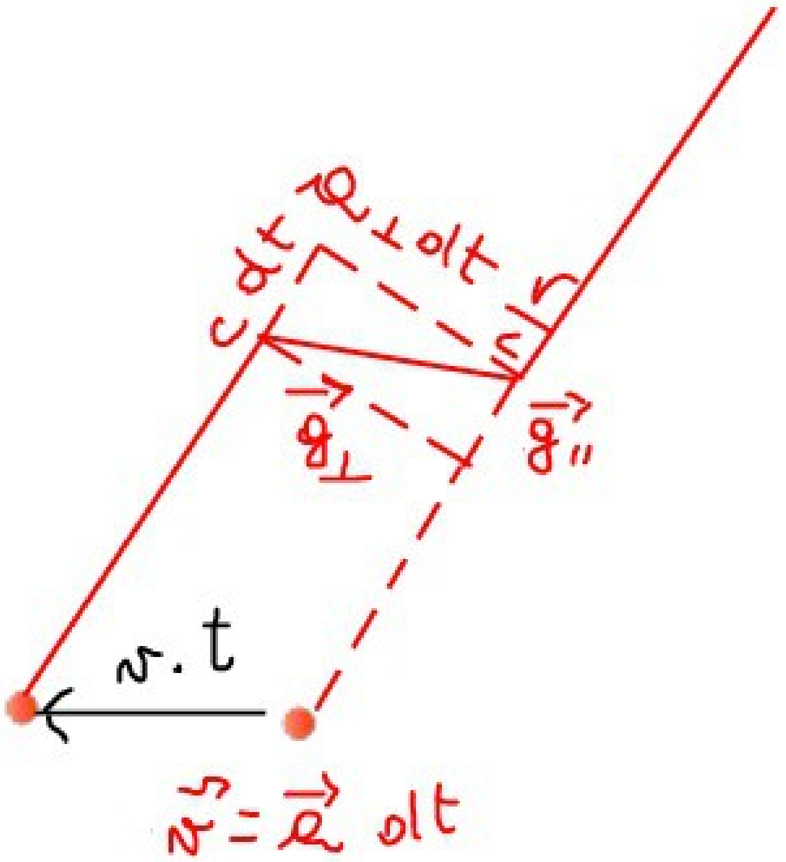
$$g_{\parallel} = \frac{Gm}{r^2}$$ MODULO DEL CAMPO RADIALE

$$\boxed{g_{\perp}} = \frac{G M a_{\perp} \cancel{r}}{c^2 r^{\cancel{2}}} = \boxed{\frac{G M a_{\perp}}{c^2} \frac{1}{r}}$$

CAMPO TRASVERSALE, O

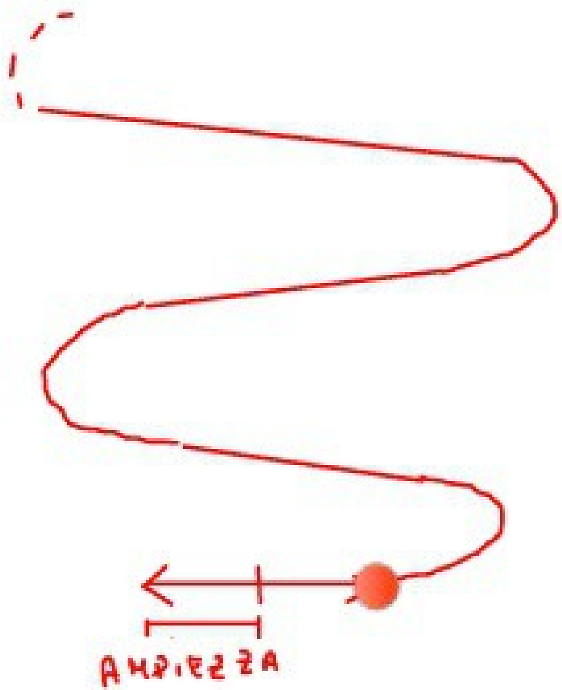
CAMPO DI RADIAZIONE.

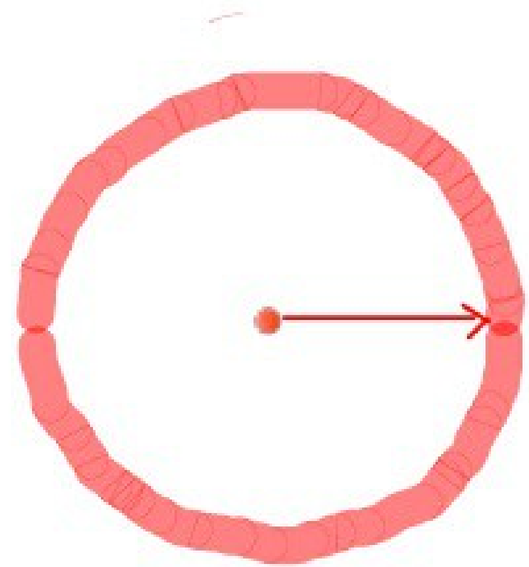
(VALE SIA PER IL CAMPO ELETTROMAGNETICO CHE PER QUELLO GRAVITAZIONALE)



La distorsione si propaga con la velocità della luce allugandosi con il trascorrere del tempo e con l'aumentare della distanza percorsa alla velocità della luce: t = r/c

NEL CASO DI UNA SORGENTE CHE OSCILLA ARMONICAMENTE TRA 2 ESTREMI





L'ENERGIA DEL CAMPO DI RADIAZIONE EMESSA NEL TEMPO dt È CONTENUTA IN UN GUSCIO SFERICO CHE SI PROPAGA CON VELOCITÀ c

VOLUME DEL GUSCIO

$$V = 4\pi r^2 \, dr \quad (r = ct)$$

DENSITÀ DI ENERGIA (TENSORE MASSA/ENERGIA) $\quad \mathcal{E} \propto |A|^2$

A = AMPIEZZA DEL CAMPO DI RADIAZIONE OSCILLANTE (O DEL TENSORE METRICO DELL'ONDA GRAVITAZIONALE)

$$\Delta E = \mathcal{E} \, 4\pi r \, dr = \text{COSTANTE} \Rightarrow |A|^2 \propto \frac{1}{r^2} \Longrightarrow$$

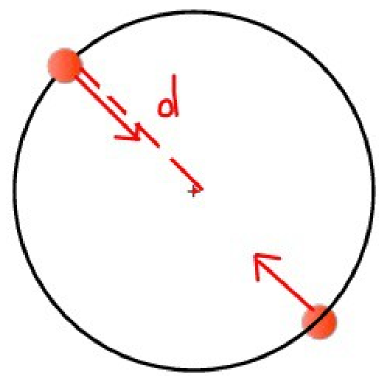
ENERGIA CONTENUTA NEL GUSCIO CHE SI PROPAGA

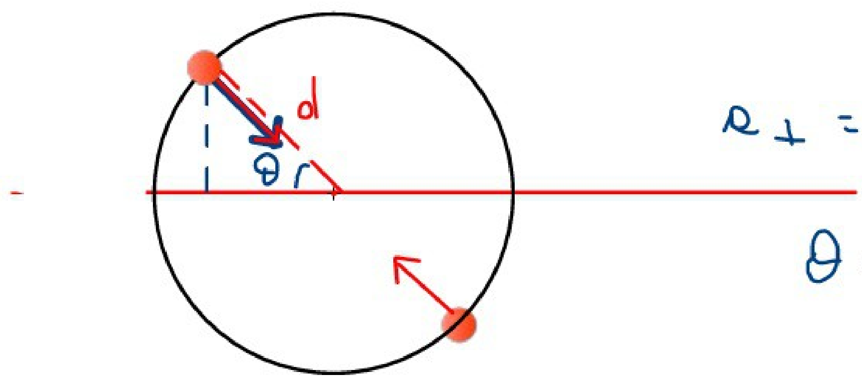
$$\Longrightarrow \boxed{E_{rad} \propto \frac{1}{r}} \quad e \quad \boxed{h_{\mu\nu} \propto \frac{1}{r}}$$

CONSIDERIAMO IL CASO DI 2 STELLE DI MASSA m CHE RUOTANO INTORNO AL LORO CENTRO DI GRAVITÀ.

L'ACCELERAZIONE È CENTRIPETA

$$a_c = \omega^2 \cdot d$$





$$a_t = a_c \operatorname{sen}\theta = \omega^2 d \operatorname{sen}\theta$$

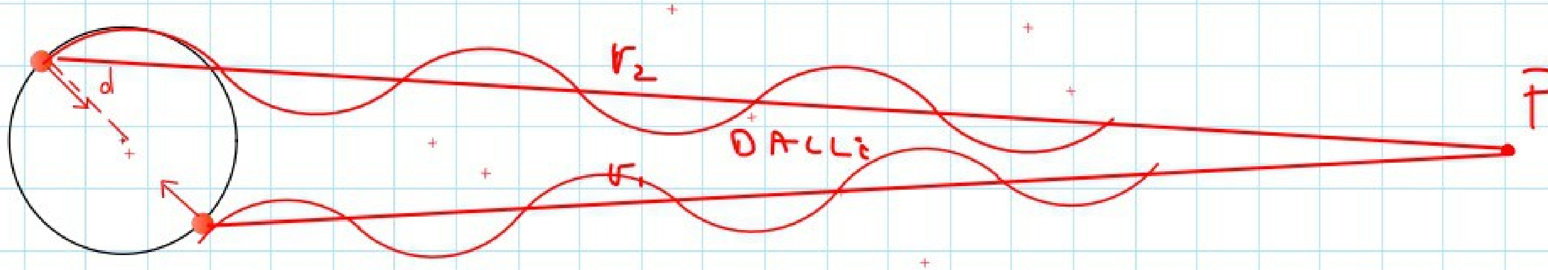
$$\theta = \omega \cdot t$$

SEGUE CHE IL CAMPO DI RADIAZIONE PRODOTTO DA UNA SINGOLA MASSA m È

$$g_R = \frac{\omega^2 G m d}{c^2 r} \operatorname{sen} \omega t$$

MA POICHÈ LA MASSA m SI MUOVE DI MOTO CIRCOLARE UNIFORME (PERIODICO), L'OSCILLAZIONE ARMONICA DEL CAMPO $\vec{g}$ SI PROPAGA IN DIREZIONE RADIALE CON LA VELOCITÀ DELLA LUCE c COME UN'ONDA ARMONICA TRASVERSALE.

MA LE SORGENTI D'ONDA DEL SISTEMA IN QUESTO CASO SONO 2...



LE ONDE EMESSE DALLE 2 SORGENTI, DESCRITTE DALLE 2 FUNZIONI

$$g_1 = \frac{\omega^2 G m}{c^2 r} \cos\left(k r_1 - \omega t\right)$$

$$g_2 = -\frac{\omega^2 G m}{c^2 r} \cos\left(k r_2 - \omega t\right)$$

(I SEGNI SONO OPPOSTI IN CORRISPONDENZA CON IL VERSO DELLE COMPONENTI TRASVERSALI DELLE RISPETTIVE ACCELERAZIONI)

SI SOMMANO FORMANDO UNA "FIGURA DI INTERFERENZA" DESCRITTA DALLA RELAZIONE

$$g_2 + g_1 = \frac{2\omega^2 G m}{c^2 r} \operatorname{sen}\left[\frac{k(r_2 - r_1)}{2}\right] \cdot \operatorname{sen}\left[\frac{k(r_1+r_2)}{2} - \omega t\right]$$

POICHÉ $\quad r_1 - r_2 = 2d\cos\theta = 2d\cos\omega t$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda},$$

PER $\quad \lambda >> d \Rightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{kd\cos\theta}{2}\right) \approx \frac{kd\cos\theta}{2}$

E PER $\quad r_2 \approx r_1 \approx r \Rightarrow \frac{r_1 + r_2}{2} \approx r$

SEGUE CHE

$$g_{RAD} \approx \frac{2\omega^2 G m d}{c^2 r} \operatorname{sen}\omega t \cdot \frac{kd}{2}\cos\omega t = \frac{\omega^2 G(md^2)}{c^2 r}\frac{2\pi}{\lambda}\operatorname{sen}(2\omega t)$$

$$\lambda = c \cdot T$$

$$g_{RAD} \simeq \frac{\omega^2 \, G \, m d^2}{c^3 \, r} \, \frac{2\pi}{T} \, \text{sen}(2\omega t) =$$

PER $\frac{2\pi}{T} = \omega$

$$\boxed{g_{RAD} \simeq \omega^3 \frac{G \, m d^2}{c^3 \, r}}$$

$P =$ FLUSSO DI ENERGIA RADIANTE $\left(\frac{\text{ENERGIA}}{\text{AREA IRRAGGIATA} \times \text{TEMPO}} \right) \times$ AREA TOTALE DI UNA SFERA CENTRATA NELLA SORGENTE

$$= \frac{1}{4\pi G} \left| g_{RAD} \right|^2 c \; 4\pi R^2$$

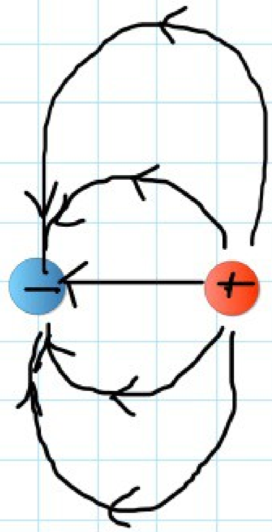
$$\Downarrow$$

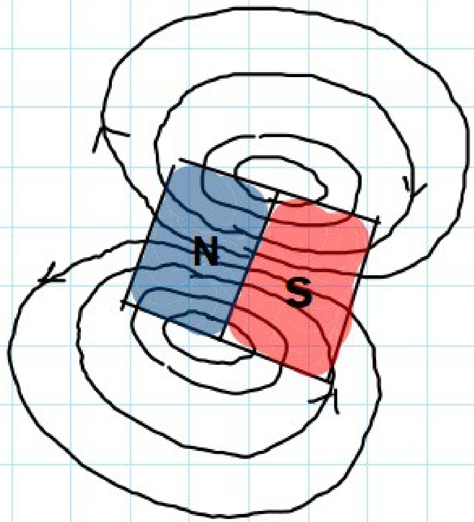
$$P_{grav} \simeq \frac{\omega^6 G^{\cancel{2}} m^2 d^4}{\cancel{G} \, c^{\cancel{6}\,5} \cancel{r^2}} \, c \, \cancel{r^2} = \boxed{\frac{\omega^6 G m^2 d^4}{c^5}}$$

(MODO APPROSSIMATIVO PER TROVARE LA DIPENDENZA DELLA POTENZA DALLA FREQUENZA)

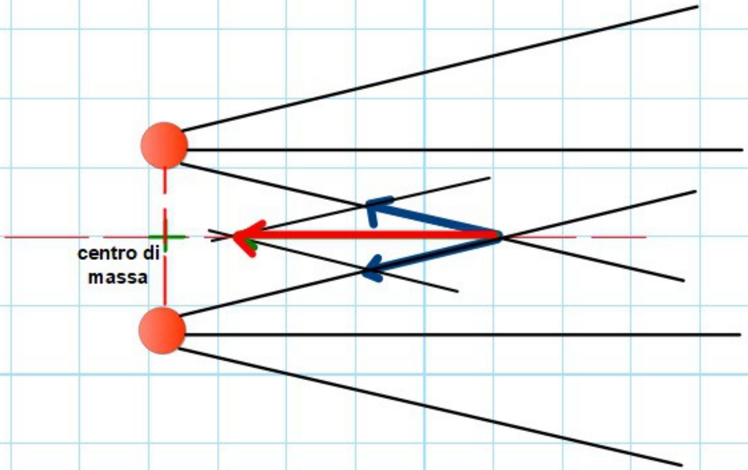
$m\,d^2 \longrightarrow$ RAPPRESENTA IL MOMENTO DI "QUADRUPOLO"

CHE COSA SIGNIFICA



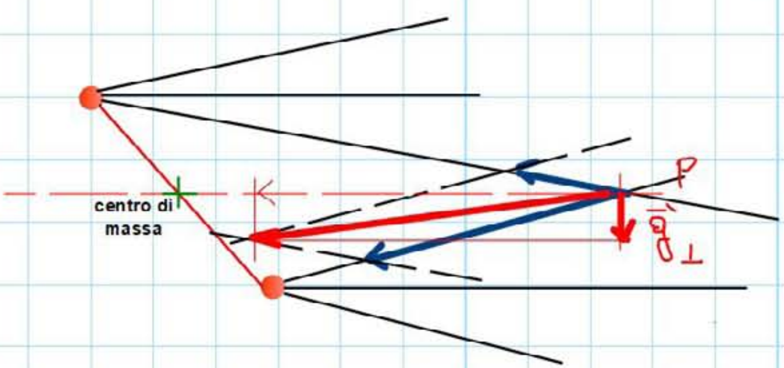


CAMPI ELETTRICO E MAGNETICO SONO CAMPI DI "DIPOLO"; LA DOPPIA POLARITÀ DELLA CARICA FORNISCE UNA COMPONENTE TRASVERSALE DEL CAMPO STATICO.



Una distribuzione di massa a simmetria assiale non genera componente trasversale alla direzione del centro di massa. Una distribuzione di massa che ha simmetria sferica genera sempre un campo radiale, e quindi non può produrre onde gravitazionali (che sono deformazioni trasversali del campo)

Momento di quadrupolo nullo



Una distribuzione di massa che non ha simmetria sferica genera componente trasversale alla direzione del centro di massa.

Momento di quadrupolo non nullo

FORMULE UTILI

$$Q^{\alpha\beta} = \int_V \rho \left(x^\alpha x^\beta - \frac{1}{3} r^2 \right) d^3\vec{x}$$

MOMENTO DI QUADRUPOLO

(V. sopra)

$\rho = T^{00}$ DENSITÀ DI MASSA/ENERGIA

$$h_{\mu\nu} = \frac{2G}{r} \frac{d^2 Q_{\mu\nu}}{dt^2}$$

$$\left(h_{\mu\nu} = \frac{2G}{c^4 r} \ddot{Q}_{\mu\nu} \right)$$

CORREZIONE "LINEARE" DEL TENSORE METRICO PER LE ONDE GRAVITAZIONALI

$$P_{GW} = \frac{1}{5} \frac{G}{c^5} \left\langle \frac{d^3 Q^{\mu\nu}}{dt^3} \frac{d^3 Q_{\mu\nu}}{dt^3} \right\rangle$$

$$P_{GW} = \frac{1}{5} \frac{G}{c^5} \left\langle \dddot{Q}^{\mu\nu} \dddot{Q}_{\mu\nu} \right\rangle$$

POTENZA IRRAGGIATA

(LUMINOSITÀ GRAVITAZIONALE)

Relazioni tra osservabili (luminosità, ampiezza) e parametri fisici della sorgente

$$F_{GW} = \frac{c^3}{16\pi G} \left| \partial_t h \right|^2 =$$

$$L_{GW} \propto \frac{\cancel{c^3}\, \omega^6}{\cancel{16\pi}\, \cancel{G}} \frac{\cancel{4}G^2}{\cancel{4 r^2}\, c^{8}_{5}} |Q|^2 \cancel{4\pi r^2}$$

$$\propto \frac{G\omega^6}{c^5} m^2 d^4 = \frac{1}{G} \frac{v^6}{d^{6}_{2} c^5} R_s^2 \; c^4 \; \cancel{d^4} =$$

$$\simeq \frac{1}{G} \left(\frac{R_s}{d}\right)^2 \left(\frac{v}{c}\right)^6 c^5$$

(LUMINOSITÀ)

Possiamo esprimere il flusso di energia delle onde gravitazionali nell'unità di tempo nell'unità di superficie anche così:

$$\overline{F}_{GW} \approx \frac{E_{GW}}{\tau \; 4\pi r^2} \approx \frac{c^3}{16\pi G} (h \cdot \nu)^2$$

AMPIEZZA

FREQUENZA

DURATA DEL SEGNALE

distanza

Da cui segue che ...

$$h \propto \omega^{-1} E_{GW}^{1/2} \tau^{-1/2} r^{-1} \quad \text{(AMPIEZZA)}$$

$$h = 10^{-22} \left(\frac{E_{GW}/c^2}{10^{-4} M_\odot} \right) \cdot \left(\frac{\nu}{1\,\mathrm{kHz}} \right)^{-1} \left(\frac{\tau}{1\,\mathrm{ms}} \right)^{-1/2} \left(\frac{r}{15\,\mathrm{Mpc}} \right)^{-1}$$

Un rilevatore di onde gravitazionali deve essere un ricevitore di onde meccaniche, cioè un oscillatore: il modello teorico classico è "l'oscillatore forzato"

$$m\ddot{x} = -\gamma\dot{x} - k x^2 + F_0 e^{i\omega t}$$

COEFFICIENTE DI ATTRITO

COEFFICIENTE DI ELASTICITÀ

OSCILLAZIONE PROVENIENTE DALL'ESTERNO.

$$F_0 = \omega^2 \boxed{L h_+}$$

LUNGHEZZA DEL RILEVATORE

DEFORMAZIONE ELASTICA PRODOTTA DALLA CURVATURA SPAZIO-TEMPORALE

SOLUZIONE

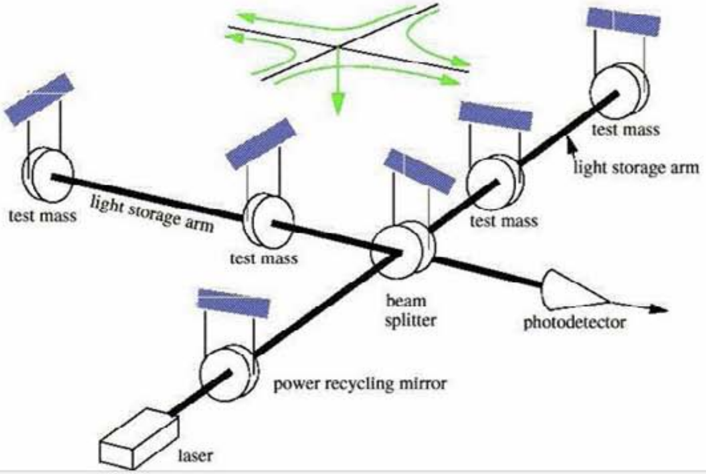
$$x(t) = \frac{\omega^2 L h_+}{2(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)} \cdot e^{i\omega t}$$

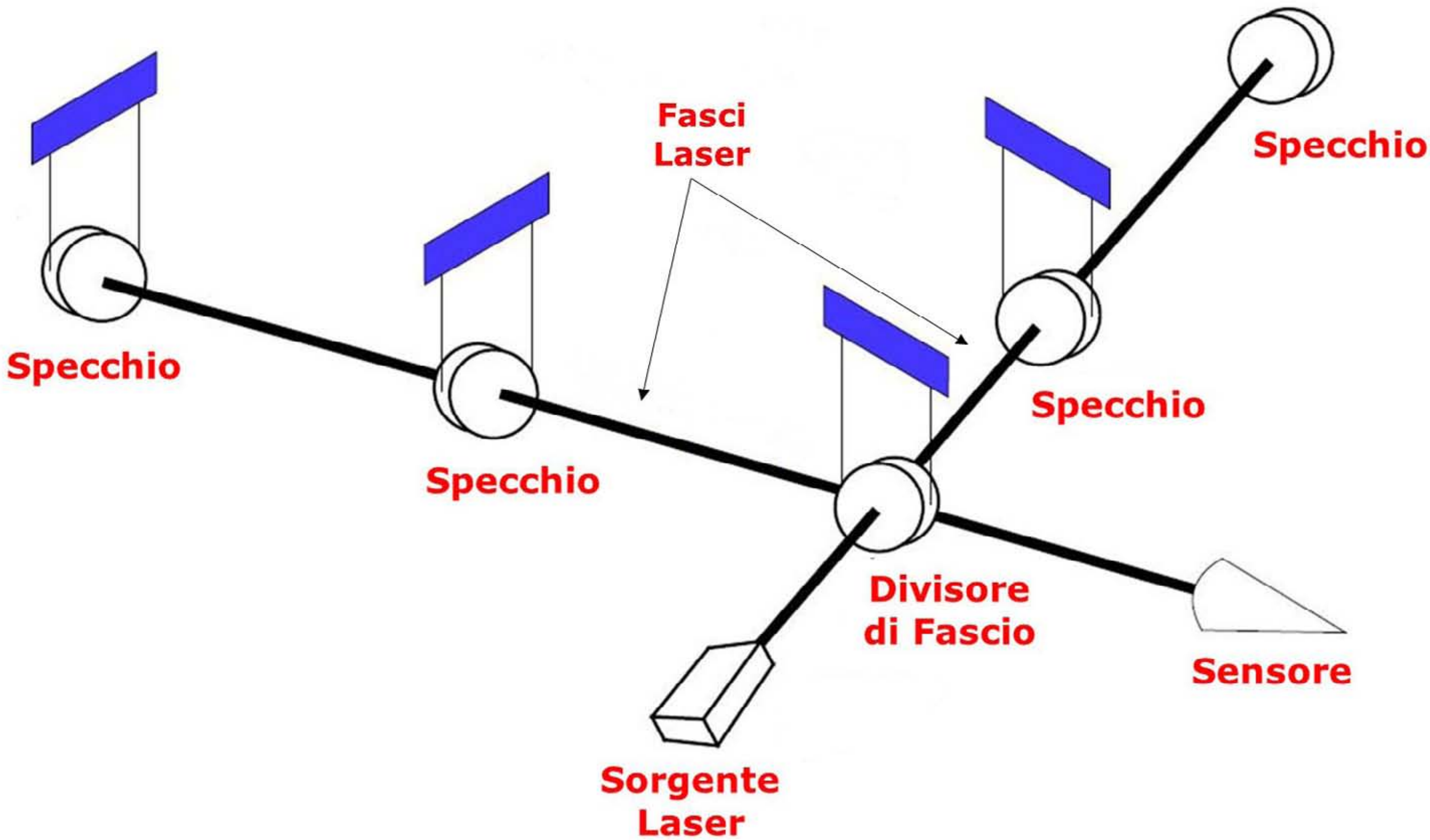
Rilevatori di onde gravitazionali.0: barra di J. Weber (Harvard 1968)

Rilevatori di onde gravitazionali oggi

Detectors: laser interferometry

- A laser interferometer is an alternative choice for GW detection, offering a combination of very high sensitivities over a broad frequency band.
- Suspended mirrors play the role of "test-particles", placed in perpendicular directions. The light is reflected on the mirrors and returns back to the beam splitter and then to a photodetector where the fringe pattern is monitored.





Fasci
Laser
Specchio
Specchio
Specchio
Specchio
Divisore
di Fascio
Sensore
Sorgente
Laser

The twin LIGO detectors (L = 4 km) at Livingston Louisiana and Hanford Washington (US).

Bibliografia di riferimento

- J. A. Wheeler: Spaziotempo e gravitazione, Ed. Zanichelli
- Steven Weinberg: Gravitation and Cosmology, Ed. Wiley
- R. Sexl, R. Schmidt: Spaziotempo, Ed. Boringhieri
- R. Sexl, H. Sexl: Nane bianche e Buchi neri. Ed. Boringhieri